Карпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Вказівки до розв'язування завдань олімпіади з математики для учнів 8-11 класів

8.1. З написаним на дошці числом можна виконувати таку дію: викреслити довільну цифру і додати її до числа, що залишилося. Повторюємо це, доки не залишиться одноцифрове число. Яке найменше одноцифрове число можна так отримати, якщо на дошці — число 1234567890?

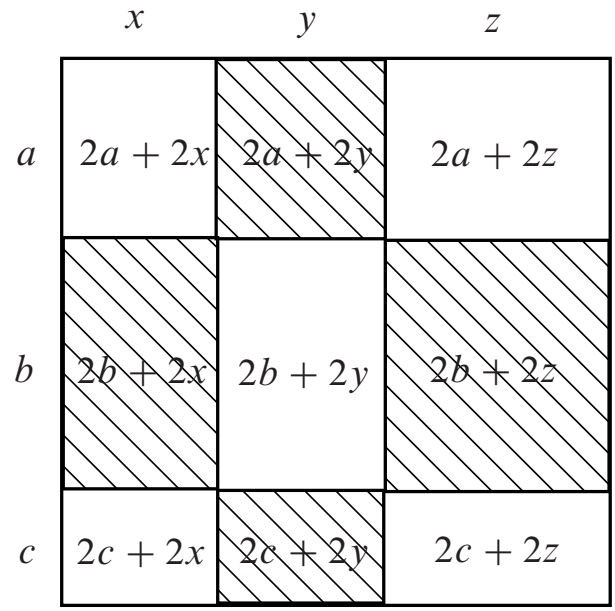
Відповідь: Незалежно від вибору послідовності дій, ми отримаємо число 9.

Розв'язання. Натуральне число та сума його цифр мають однакову остачу при діленні на 9. Якщо з числа $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ викреслено i-ту цифру, то отримано число $\overline{a_1a_2\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n}$, яке має однакову остачу при діленні на 9 з сумою $a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} + a_{i+1} + \ldots + a_n$. Тоді вираз $\overline{a_1a_2\ldots a_{i-1}a_{i+1}\ldots a_n} + a_i$, тобто нове число, має однакову остачу при діленні на 9 з сумою $a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1} + a_i + a_{i+1} + \ldots + a_n$, а тоді і з вихідним числом $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$. Отже, описане перетворення не змінює остачі від ділення числа на 9.

Зауважимо, що $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ ділиться на 9, тому й всі числа, отримані перетвореннями числа 1234567890, будуть подільні на 9. Оскільки з ненульового числа не можна отримати нуль, то остаточне число може бути тільки дев'яткою.

8.2. Квадрат площі 100 поділено на прямокутники так, як показано на малюнку, причому сума периметрів заштрихованих частин рівна сумі периметрів незаштрихованих, а площа центральної (незаштрихованої) частини рівна 25. Доведіть, що ця частина є квадратом.

Розв'язання. Нехай одну сторону квадрата поділено на частини довжин a, b, c, а іншу — на частини довжин x, y, z. Запишемо на малюнку у



кожну частину її периметр, тоді сума периметрів заштрихованих частин рівна $2(a + c + x + z) + 4(b + y)$, а сума периметрів незаштрихованих — $4(a + c + x + z) + 2(b + y)$. За умовою ці числа рівні, тому їх різниця $2(b + y) - 2(a + c + x + z)$ рівна нулю, отже, $b + y = a + c + x + z$. Врахуємо, що сторона квадрата рівна $10 = a + b + c = x + y + z$, тоді $(b + y) + (a + c + x + z) = 20$. Отримуємо $b + y = a + c + x + z = 10$, а за умовою площа центральної частини рівна $by = 25$.

Система

$$\begin{cases} b + y &= 10, \\ by &= 25 \end{cases}$$

має очевидний розв'язок $b = y = 5$. Те, що інших розв'язків немає, випливає, наприклад, з відомої нерівності між середніми геометричним і арифметичним $\sqrt{by} \le \dfrac{b + y}{2}$, яка перетворюється у рівність тільки при $b = y$, а в нашому випадку якраз маємо $\sqrt{by} = \dfrac{b + y}{2} = 5$. Отже, центральний прямокутник зі сторонами $b = 5$ і $y = 5$ є квадратом.

8.3. На площині дано дві паралельні прямі a і b. На прямій a позначили 6 різних точок, а на прямій b позначили 8 різних точок.

a) Скільки існує різних трикутників із вершинами в позначених точках?

b) Скільки існує різних опуклих чотирикутників із вершинами в позначених точках?

Відповідь: a) 288, b) 420.

Розв'язання. a) якщо у трикутника дві вершини в точках на прямій a: $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ різних способів вибору цих вершин, а одна вершина в точці на прямій b: 8 способів, то всього маємо $15 \cdot 8 = 120$ трикутників, а якщо дві вершини - в точках на прямій b: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ різних способів, одна вершина в точці на прямій a: 6 способів, то всього в цьому варіанті $28 \cdot 6 = 168$ трикутників. Разом $120 + 168 = 288$ трикутників. b) аналогічно, дві вершини в точках на прямій a: $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ способів їх вибору, дві вершини - в точках на прямій b: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ різних способів. Всього $15 \cdot 28 = 420$ чотирикутників.

8.4. У комп'ютерній грі персонаж може покращувати два показники: Силу (коштує 3 золоті монети за рівень) та Спритність (коштує 5 золотих монет за рівень). Відомо, що гравець витратив на покращення обох навичок рівно 100 золотих монет, причому добуток отриманих рівнів Сили та Спритності виявився максимально можливим. Скільки рівнів кожного показника придбав гравець?

Відповідь: гравець придбав 15 рівнів Сили, 11 рівнів Спритності.

Розв'язання. Нехай x — кількість отриманих рівнів Сили, а y — кількість отриманих рівнів Спритності. Оскільки витрачено рівно 100 монет, отримаємо рівність $3x + 5y = 100$. $3x = 100 - 5y$ кратне 5, тому і x кратне

5. До того ж $3x \leq 100$, тому $x \leq 30$. Перебираємо всі можливі значення x:

$$x = 5, \quad y = \frac{100 - 3 \cdot x}{5} = 17, \quad x \cdot y = 85,$$

$$x = 10, \quad y = \frac{100 - 3 \cdot x}{5} = 14, \quad x \cdot y = 140,$$

$$x = 15, \quad y = \frac{100 - 3 \cdot x}{5} = 11, \quad x \cdot y = 165,$$

$$x = 20, \quad y = \frac{100 - 3 \cdot x}{5} = 8, \quad x \cdot y = 160,$$

$$x = 25, \quad y = \frac{100 - 3 \cdot x}{5} = 5, \quad x \cdot y = 125,$$

$$x = 30, \quad y = \frac{100 - 3 \cdot x}{5} = 2, \quad x \cdot y = 60.$$

Бачимо, що максимальне значення добутку отриманих рівнів дорівнює 165.

9.1. Скільки всього є трицифрових чисел, у яких квадрат однієї цифри рівний добутку двох інших цифр?

Відповідь: 42.

Розв'язання. З рівняння $ab = c^2$ для цифр бачимо, що, якщо цифри a, c, b ненульові, то вони повинні утворювати арифметичну прогресію. Зокрема, маємо 9 трійок однакових цифр і для них 9 чисел: 111, 222, ..., 999. Існує 4 зростаючі прогресії з одноцифрових чисел: $(1, 2, 4)$, $(2, 4, 8)$, $(1, 3, 9)$, $(4, 6, 9)$, і з кожного такого набору маємо по 6 чисел з різними перестановками цифр, наприклад, з набору $(1, 2, 4)$ можемо утворити числа 124, 214, 142, 412, 241, 421. Нарешті, маємо 9 чисел $100, 200, \ldots, 900$ з нульовими цифрами, тобто всього $9 + 4 \cdot 6 + 9 = 42$ числа.

9.2. На острові є чарівна печера, в якій мешкає гном. Якщо залишити у печері на ніч деяку кількість золотих монет, то гном збільшить її втричі, але, як плату за свої послуги, після цього забере дві монети. З якої найменшої кількості монет можна отримати від 2000 до 2100 монет, залишивши їх у печері на кілька ночей? Скільки монет отримаємо?

Відповідь: з 26 монет за 4 дні можна отримати 2026 монет.

Розв'язання. Нехай у печеру поклали a_0 монет, з яких за наступні ночі отримали відповідно a_1, a_2, a_3, ... монет. За умовою $a_{n+1} = 3a_n - 2$. Віднявши від цієї рівності 1, маємо $a_{n+1} - 1 = 3a_n - 3 = 3(a_n - 1)$, тобто число $a_n - 1$ за одну ніч зростає втричі. Отже, за k ночей матимемо

$$(a_k - 1) = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{k \text{ разів}} \cdot (a_0 - 1),$$

тобто $a_k = 3^k(a_0 - 1) + 1$. Нам потрібно $2000 \le 3^k(a_0 - 1) + 1 \le 2100$, тобто $1999 \le 3^k(a_0 - 1) \le 2099$, звідки

$$\frac{1999}{3^k} + 1 \le a_0 \le \frac{2099}{3^k} + 1.$$

Зрозуміло, що потрібно знайти натуральне число від 1999 до 2099, яке ділиться на найбільший можливий степінь трійки. При $k = 4$ маємо

$$25\frac{55}{81} = \frac{1999}{81} + 1 \le a_0 \le \frac{2099}{81} + 1 = 26\frac{74}{81},$$

звідки єдино можливе натуральне значення a_0 дорівнює 26, а відповідна кількість монет за 4 дні рівна $a_4 = 81 \cdot (26 - 1) + 1 = 2026$.

Якщо кількість днів k буде не більша за 3, то

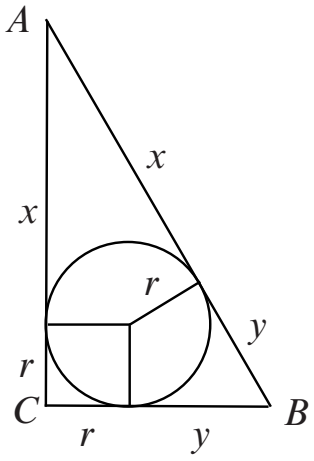
$$a_0 \ge \frac{1999}{3^k} + 1 \ge \frac{1999}{27} + 1 = 75\frac{1}{27},$$

тобто початкова кількість монет буде не меншою за 76, що більше за 26.

Отримати кількість монет від 2000 до 2100 за пять чи більше днів неможливо, оскільки між 1999 і 2099 нема чисел, подільних на $3^5 = 243$.

9.3. Незнайко хвалиться, що у прямокутний трикутник з гіпотенузою 2 він вписав коло, а в це коло — прямокутний трикутник з гіпотенузою 1. Доведіть, що Незнайко помиляється.

Розв'язання. Як відомо, дві дотичні до кола з тієї ж точки рівні, тому для дотичних до вписаного в $\triangle ACB$ кола з вершин трикутника (див. малюнок) істинне $x + y = AB = c$, $x + r = AC = b$, $y + r = BC = a$ (зверніть увагу, що дотична з вершини прямого кута рівна радіусу r вписаного кола).



Додавши другу і третю рівності і віднявши від їх суми першу, отримаємо діаметр $2r = a + b - c$ вписаного кола. Воно є описаним навколо меншого прямокутного трикутника, тому його діаметр дорівнює гіпотенузі, звідки за умовою $a + b - c = 1$. Враховуючи $c = 2$, маємо $a + b = 3$.

Покажемо, що ці рівності суперечать теоремі Піфагора $a^2 + b^2 = c^2$, тобто $a^2 + b^2 = 4$ у нашому випадку. Оскільки $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 3^2 = 9$, то $2ab = 9 - 4 = 5$, а тоді $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 4 - 5 = -1$, що неможливо.

9.4. У кожну клітинку таблиці розміром 3x3 записано додатне число. Відомо, що в кожному рядку середнє число дорівнює середньому арифметичному двох крайніх чисел цього рядка, а в кожному стовпці середнє число дорівнює середньому геометричному двох крайніх чисел цього стовпця. У верхній лівій клітинці записано число 10, у нижній правій — число 32, а сума всіх дев'яти чисел таблиці дорівнює 189. Знайдіть усі можливі варіанти заповнення цієї таблиці.

Розв'язання 1. З умови випливає, що числа в таблиці задовольняють умови

a	b	c
aq	bs	cr
aq^2	bs^2	cr^2

$$\begin{cases} a + c & = b, \\ aq + cr & = bs, \\ aq^2 + cr^2 & = bs^2. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь системи випливає $aq + cr = 2bs = as + cs$, або $a(s-q) + c(r-s) = 0$. А з третього рівняння випливає $aq^2 + cr^2 =$

$2bs^2 = as^2 + cs^2$, або $a(s^2 - q^2) + c(r^2 - s^2) = 0$. Далі, з отриманих двох останніх рівнянь матимемо $(s^2 - q^2)(s - r) = (s^2 - r^2)(s - q)$ і після спрощень $(s - r)(s - q)(r - q) = 0$, далі з врахуванням рівняння $a(s - q) + c(r - s) = 0$ остаточно отримуємо $q = s = r$.

З умови випливає $a = 10$, $cq = 32$. Порахуємо суму всіх елементів в таблиці і отримаємо рівняння $3\dfrac{a + c}{2}(1 + q + q^2) = 189$, і далі таке рівняння $3\Big(5 + \dfrac{16}{q^2}\Big)(1 + q + q^2) = 189$. Бачимо, що коренями рівняння є числа $q = 1$, $q = 2$. Після спрощень і розкладання на множники з врахуванням теореми Безу отримаємо рівняння $(q-1)(q-2)(5q^2+20q+24) = 0$. Квадратний тричлен має від'ємний дискримінант, тому єдиними розв'язками є знайдені значення $q = 1$, $q = 2$. А відповідні таблиці мають вигляд

10	21	32
10	21	32
10	21	32

$q = 1$

10	9	8
20	18	16
40	36	32

$q = 2$

Розв'язання 2. За умовою у рядках таблиці маємо арифметичні прогресії, а у стовпцях — геометричні прогресії, знаменники яких позначимо p, q, r. Якщо числа у середньому рядку рівні a, b, c, то таблиця містить числа

$\frac{a}{p}$	$\frac{b}{q}$	$\frac{c}{r}$
a	b	c
ap	bq	cr

Тоді $\frac{b}{q} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{p} + \frac{c}{r}\right)$, $b = \frac{1}{2}(a + c)$, $bq = \frac{1}{2}(ap + cr)$, і за ознакою геометричної прогресії

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{p} + \frac{c}{r}\right) \cdot \frac{1}{2}(ap + cr) = \left(\frac{1}{2}(a + c)\right)^2,$$

звідки (після домноження на 4)

$$a^2 + c^2 + ac\left(\frac{r}{p} + \frac{p}{r}\right) = a^2 + c^2 + 2ac,$$

отже, $\frac{r}{p} + \frac{p}{r} = 2$. Сума числа і оберненого до нього рівна 2 тоді і тільки тоді, коли це число рівне 1, тоді $p = r$, і прогресії у першому і третьому, а тоді й у другому, стовпцях мають однаковий знаменник p.

За умовою $\frac{a}{p} = 10$, $cp = 32$, і сума чисел таблиці рівна

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{p} + 1 + p\right) = \frac{3}{2}(a + c)\left(\frac{1}{p} + 1 + p\right) = 189,$$

звідки

$$3\left(10p + \frac{32}{p}\right)\left(\frac{1}{p} + 1 + p\right) = 2 \cdot 189 = 9 \cdot 42 = 10,5 \cdot 36.$$

Бачимо, що рівність істинна при $p = 1$ (що очевидно) та $p = 2$ (що дещо важче зауважити), а тоді домноженням на p^2 перетворюємо її у рівняння 4-го степеня. Як і у розв'язанні 1, показуємо, що воно не має інших коренів, і отримуємо обидві можливі таблиці.

10.1. При яких значеннях параметрів b і c обидва корені рівняння $2x^2 - 7x + b = 0$ взаємно обернені обидвом кореням рівняння $3x^2 - 7x + c = 0$?

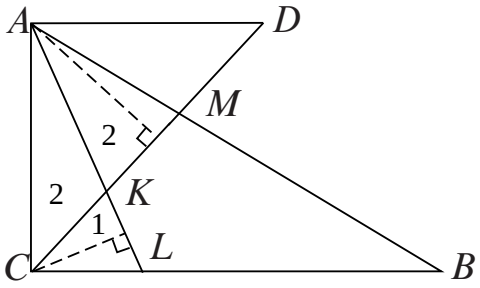
Відповідь: $b = 3, c = 2$.

Розв'язання. Нехай a, d – корені першого рівняння, тоді $1/a, 1/d$ – корені другого рівняння. За теоремою Вієта для першого рівняння $a + d = 7/3$, $ad = b/2$, а за теоремою Вієта для другого рівняння - $1/a + 1/d = 7/3$, $1/ad = c/3$/ Отже, $(a + d)/ad = 7/3$ і

$$ad = \frac{a+d}{\frac{a+d}{ad}} = \frac{7/2}{7/3} = \frac{3}{2}.$$

Тому $b = 2ad = 3, c = 3/ad = 2$.

10.2. Знайдіть площу четвертої (чотирикутної) з частин, на які поділено трикутник, якщо у трикутних частинах вказано їх площі.



Відповідь: 7.

Розв'язання. Оскільки трикутники CKL і CKA мають спільну висоту, проведену з вершини C, то відношення їх площ рівне відношенню основ, звідки $|KA| = 2 \cdot |KL|$.

Продовжимо пряму CM до перетину у точці D з проведеною через A прямою, паралельною до CB. Тоді трикутники KDA і KCL подібні з коефіцієнтом подібності 2, отже, відношення їх площ рівне 4, що дає площу трикутника KDA, рівну 4. Тоді площа трикутника MAD рівна різниці площ трикутників KAD і KAM, тобто $4 - 2 = 2$.

Оскільки трикутники CAK, KAM і MAD мають спільну висоту, проведену з вершини A, і рівні площі, то їх основи рівні, тому $|CM| = |CK| + |KM| = 2 \cdot |MD|$. Отже, трикутники BCM і ADM подібні з коефіцієнтом подібності 2, і площа трикутника BCM вчетверо більша за площу трикутника ADM, тобто становить 8. Віднявши від неї площу трикутника CKL, отримаємо, що шукана площа чотирикутника $KMBL$ дорівнює $8 - 1 = 7$.

10.3. Іван грає у таку гру: він обирає натуральне число m, не більше за 100, а тоді ділить його з остачею на деяке n, менше за m. Виграшем Івана стає **менше** з двох чисел – частки і остачі. Яке число m і який дільник n варто обрати Іванові, щоб його виграш був найбільшим?

Відповідь: $m = 99$, $n = 10$, тоді виграш дорівнює 9.

Розв'язання. Нехай при діленні отримано частку p і остачу q, тоді $m = np + q$. За умовою виграш k є меншим з чисел p і q, тоді $p \geq k$, а дільник n більший за остачу $q \geq k$, звідки $n \geq k + 1$. Отже, $m \geq (k + 1)k + k = k^2 + 2k$, тобто $m + 1 \leq k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. Оскільки $m \leq 100$, то $(k + 1)^2 \leq 101$. Найбільший повний квадрат, що не перевищує 101 — це 100, звідки $k + 1 \leq 10$, тобто виграш k не може бути більшим за 9. Його можна досягти, якщо у оцінках вище досягаються рівності: $p = q = k = 9$, $n = k + 1 = 10$, тоді $m = 10 \cdot 9 + 9 = 99$ дає дає частку 9 і остачу 9 при діленні на 10.

10.4. У кожну клітинку таблиці розміром 4 на 4 записано додатне число. Відомо, що в кожному рядку кожне число, окрім крайніх, дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх із ним чисел цього рядка, а в кожному стовпці кожне число, окрім крайніх, дорівнює середньому геометричному двох сусідніх із ним чисел цього стовпця. У верхній лівій клітинці записано число 17, у нижній правій — число 88, а сума всіх шістнадцяти чисел у таблиці дорівнює 840. Знайдіть усі можливі варіанти заповнення цієї таблиці.

Розв'язання. З розв'язання задачі 4 для 9 класу випливає, що у стовпчиках таблиці розміщені члени геометричних трапецій з однаковим знаменником.

a	b	c	d
aq	bq	cq	dq
aq^2	bq^2	cq^2	dq^2
aq^3	bq^3	cq^3	dq^3

З умови випливає $a = 17$, $dq^3 = 88$. Порахуємо суму всіх елементів в таблиці і отримаємо рівняння $4\dfrac{a+d}{2}(1+q+q^2+q^3)$, і далі таке рівняння $2\left(17+\dfrac{88}{q^3}\right)(1+q+q^2+q^3) = 840$. Бачимо, що коренями рівняння є числа $q = 1$, $q = 2$. Після спрощень і розкладання на множники з врахуванням теореми Безу отримаємо рівняння

$$(q-1)(q-2)(17q^4+68q^3+187q^2+100q+44) = 0.$$

Многочлен в останньому третьому множнику має всі додатні коефіцієнти, тому додатних коренів не має, тому єдиними розв'язками є знайдені значення $q = 1$, $q = 2$. А відповідні таблиці мають такий вигляд

17	$\frac{122}{3}$	$\frac{193}{3}$	88
17	$\frac{122}{3}$	$\frac{193}{3}$	88
17	$\frac{122}{3}$	$\frac{193}{3}$	88
17	$\frac{122}{3}$	$\frac{193}{3}$	88

q=1

17	15	13	11
34	30	26	22
68	60	52	44
136	120	104	88

q=2

11.1. Чи можуть при деякому значенні x три числа $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ у вказаному порядку бути послідовними членами арифметичної прогресії? Якщо так, то скільки всього існує таких трійок?

Відповідь: так, існує дві такі трійки.

Розв'язання. Якщо три числа $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ у вказаному порядку є послідовними членами арифметичної прогресії, виконується рівність $\cos x - \sin x = \operatorname{tg} x - cosx$ або $2\cos x = \sin x + \operatorname{tg} x$. Враховуючи періоди і ОДЗ вказаних функцій, достатньо дослідити рівняння $f(x) = 0$ для функції $f(x) = 2\cos x - \sin x + \operatorname{tg} x$ на проміжку довжини 2π, наприклад, на проміжках $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

a) $\frac{-\pi}{2} < x < 0$: $\cos x > 0$, $\sin x < 0$, $\operatorname{tg} x < 0$ — коренів немає.

b) $0 \le x < \frac{\pi}{2}$: функція $y = \cos x$ спадна, функції $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ зростаючі, тому функція $f(x) = 2\cos x - \sin x + \operatorname{tg} x$ спадна, $f(x)$ неперервна, і, оскільки $f(0) = 2$ і $f(x) \to -\infty$ при $x \to \frac{\pi}{2}$, то на цьому проміжку існує рівно одне значення $x = a$ таке, що $f(a) = 0$.

c) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$: Обчислимо похідну функції $f(x)$:

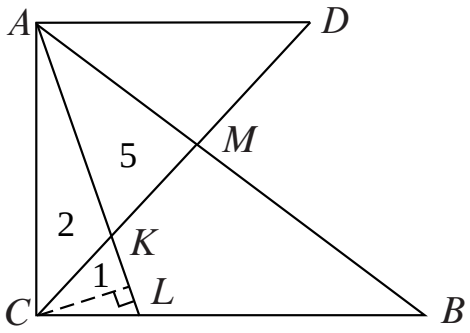
$$f'(x) = -2\sin x - \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} = -2\sin x - \frac{cosx + 1}{\cos^2 x}.$$

Оскільки $\cos x > -1$, $\sin x > 0$, то $f'(x) < 0$, тому функція $f(x)$ спадна, $f(x)$ неперервна, $f(x) \to +\infty$ при $x \to \frac{\pi}{2}$ і $f(\pi) = -2$, то на цьому проміжку існує рівно одне значення $x = b$ таке, що $f(b) = 0$.

d) $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$: $\cos x < 0$, $\sin x > 0$, $\operatorname{tg} x > 0$ — коренів немає.

Зауважимо, що $\cos a > 0$, а $\cos b < 0$, тому трійки чисел $(\sin a, \cos a, \operatorname{tg} a)$ і $(\sin b, \cos b, \operatorname{tg} b)$ різні.

11.2. Доведіть, що площі трикутних частин **не можуть** бути такими, як вказано на малюнку.



Розв'язання. Оскільки трикутники CKL і CKA мають спільну висоту, проведену з вершини C, то відношення їх площ рівне відношенню основ, звідки $|KA| = 2 \cdot |KL|$.

Продовжимо пряму CM до перетину у точці D з проведеною через A прямою, паралельною до CB. Тоді трикутники KDA і LCM подібні з коефіцієнтом подібності 2, отже, відношення їх площ рівне 4, що дає площу трикутника KDA, рівну 4. Тоді ця площа менша за площу 5 трикутника KAM, що неможливо.

11.3. Іван грає у таку гру: він обирає натуральне число m, не більше за 2027, а тоді ділить його з остачею на деяке n, менше за m. Виграшем Івана стає **менше** з двох чисел – частки і остачі. Яке число m і який дільник n варто обрати Іванові, щоб його виграш був найбільшим?

Відповідь: $m = 2024$, $n = 45$, тоді виграш дорівнює 44.

Розв'язання. Нехай при діленні отримано частку p і остачу q, тоді $m = np + q$. За умовою виграш k є меншим з чисел p і q, тоді $p \geq k$, а дільник n більший за остачу $q \geq k$, звідки $n \geq k + 1$. Отже, $m \geq (k + 1)k + k = k^2 + 2k$, тобто $m + 1 \leq k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$. Оскільки $m \leq 2027$, то $(k + 1)^2 \leq 2028$. Найбільший повний квадрат, що не перевищує 2028 — це $45^2 = 2025$, звідки $k + 1 \leq 45$, тобто виграш k не може бути більшим за 44. Його можна досягти, якщо у оцінках вище досягаються рівності: $p = q = k = 44$, $n = k + 1 = 45$, тоді $m = 45 \cdot 44 + 44 = 45^2 - 1 = 2024$ дає частку 44 і остачу 44 при діленні на 45.

11.4. Для участі в науковій конференції потрібно сформувати оргкомітет із 6 членів, обираючи їх серед 7 старшокласників (серед яких є Антон та Богдан) і 5 викладачів (серед яких є професор Петриненко). Скількома способами можна сформувати цей оргкомітет так, щоб виконувалися три умови:

1) В оргкомітеті має бути рівно 4 учні та 2 викладачі.
2) Антон і Богдан не можуть увійти до оргкомітету одночасно.
3) Якщо до оргкомітету входить професор Петриненко, то Антон обов'язково має бути в оргкомітеті (як його асистент).

Відповідь: 190.

Розв'язання. *Якщо професор в оргкомітеті:* зафіксуємо в складі професора та Антона, виключаємо Богдана. Порахуємо кількість способів добрати 1 викладача з 4 — 4 способи, та 3 учнів із 5 — $C_5^3 = 10$, а результати перемножимо. Отримаємо 40 способів.

Якщо професора немає в оргкомітеті: вибираємо 2 викладачів із 4 — $C_4^2 = 6$ способів. Для вибору 4 учнів з 7 загальна кількість варіантів вибору — $C_7^4 = 35$, від отриманої кількості віднімаємо кількість варіантів вибору 4 учнів, серед яких є і Богдан і Антон — $C_5^2 = 10$. Всього маємо $35-10 = 25$ варіантів вибору учнів. Результати перемножимо. Отримаємо 150 способів. Разом у двох варіантах $40 + 150 = 190$ способів.