Карпатський національний університет імені Василя Стефаника

Вказівки до розв'язування завдань олімпіади з математики для учнів 8-11 класів

8.1. Знайдіть найменше натуральне число, сума всіх цифр якого рівна 2026.

Відповідь: $1\underbrace{99\cdots99}_{225\text{ цифр}}$.

Розв'язання. Такі натуральні числа існують (наприклад, записане 2026-ма одиницями підряд), тому серед них існує єдине найменше. Зрозуміло, що у ньому нема нулів, інакше їх можна викреслити, і число зменшиться без зміни суми цифр. Якщо у записі числа з сумою цифр 2026 на i-му місці з кінця є ненульова цифра a_i, а після неї на j-му місці з кінця цифра $a_j < 9$ (тоді $i > j$), то без зміни суми цифр можна зменшити a_i на одиницю, а a_j збільшити на одиницю, при чому число зменшиться на $10^{i-1} - 10^{j-1}$, отже, воно не було найменше. Звідси запис потрібного найменшого числа повинен мати вигляд послідовності дев'яток, перед якими може бути щонайбільше одна цифра, відмінна від дев'яти. Оскільки $2026 : 9 = 225$ (ост. 1), то у шуканому числі перед 225-ма дев'ятками записана одна одиниця.

8.2. Вкажіть всі цілі значення числа m такі, що число

$$\frac{3m^2 + 2m + 1}{5m + 3}$$

також ціле.

Відповідь: -1, -5.

Розв'язання. Нехай

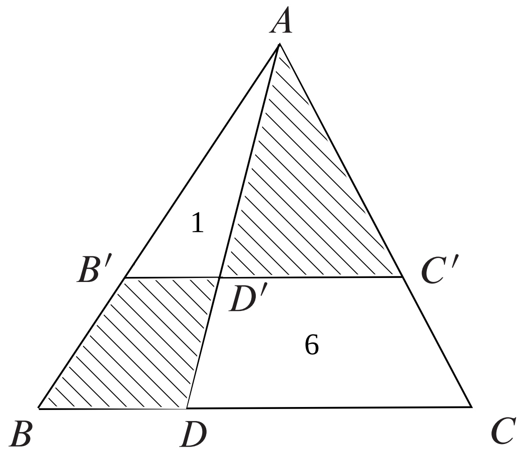
$$n = \frac{3m^2 + 2m + 1}{5m + 3}, \quad t = 5m + 3.$$

Тоді $m = \dfrac{t-3}{5}$, і

$$25n = \frac{3(t-3)^2 + 10(t-3) + 25}{t} = \frac{3t^2 - 8t + 22}{t} = 3t - 8 + \frac{22}{t}.$$

Оскільки число $\dfrac{22}{t}$ повинне бути цілим, то перевіряємо всі цілі дільники числа 22, тобто -22, 22, -11, 11, -2, 2, -1, 1, які дають остачу 3 при діленні на 5. Підходять лише -2 і 22. При $t = -2$ отримуємо $m = -1$, а при $t = 22$ маємо $m = -5$.

8.3. Відрізок, паралельний до основи, та відрізок, що виходить з вершини, ділять трикутник на частини площ 1 см^2, 6 см^2 та ще дві заштриховані, сума площ яких рівна 5 см^2, як показано на малюнку. Знайдіть площі заштрихованих частин.



Відповідь: 2 см^2 і 3 см^2.

Розв'язання. Зрозуміло, що $\dfrac{|D'C'|}{|B'D'|} = \dfrac{|DC|}{|BD|}$. Позначимо це відношення k. Оскільки трикутники $\triangle ABD$ і $\triangle ADC$ мають спільну висоту, відношення їх площ рівне відношенню основ, тобто $\dfrac{S_{ADC}}{S_{ABD}} = k$. Аналогічно $\dfrac{S_{AD'C'}}{S_{AB'D'}} = k$, отже, $S_{ADC} = k \cdot S_{ABD}$, $S_{AD'C'} = k \cdot S_{AB'D'}$. Віднявши від першої рівності другу, отримаємо таке ж відношення для площ чотирикутників: $S_{D'C'CB} = k \cdot S_{B'D'DB}$. Оскільки за умовою $S_{AB'D'} =$

1, $S_{D'C'\text{CB}} = 6$, звідси маємо вирази для площ заштрихованих частин $S_{AD'C'} = k \cdot 1 = k$, $S_{B'D'DB} = \frac{1}{k} \cdot 6 = \frac{6}{k}$. З рівняння $k + \frac{6}{k} = 5$, тобто $k^2 - 5k + 6 = 0$, знаходимо можливі значення $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, тоді або $S_{AD'C'} = 2$, $S_{B'D'DB} = 3$, або, навпаки, $S_{AD'C'} = 3$, $S_{B'D'DB} = 2$.

8.4. Таблицю 7×7 заповнили цілими числами так, що сума чисел в клітинках кожного квадрата 2×2 додатна. Чи обов'язково сума всіх чисел таблиці також додатна?

Відповідь: Ні, не обов'язково.

Розв'язання. Заповнимо таблицю числами так, як показано на рисунку. Бачимо, що кожний квадрат 2×2 містить два нулі і числа 3 та -2. У такому квадраті сума чисел рівна 1, отже, додатна, а сума всіх чисел в таблиці -5 є від'ємною.

-2	0	-2	0	-2	0	-2
0	3	0	3	0	3	0
-2	0	-2	0	-2	0	-2
0	3	0	3	0	3	0
-2	0	-2	0	-2	0	-2
0	3	0	3	0	3	0
-2	0	-2	0	-2	0	-2

9.1. Знайдіть всі способи подати 2026 у вигляді суми деякої кількості послідовних натуральних чисел.

Відповідь: $505 + 506 + 507 + 508$ чи 2026.

Розв'язання. Довільні k натуральних чисел, починаючи з n, утворюють арифметичну прогресію $n, n+1, \ldots, n+k-1$ з сумою

$$\frac{n+(n+k-1)}{2} \cdot k = \frac{k(2n+k-1)}{2}.$$

Щоб вона була рівною 2026, чисельник $k(2n+k-1)$ повинний бути рівним 4052. Зауважимо, що перший зі співмножників k і $2n+k-1$ менший за другий, і вони різної парності: якщо перший з них парний, то другий непарний, і навпаки. Число $4052 = 4 \cdot 1013$ можна розкласти в добуток парного і непарного тільки ще одним способом $1 \cdot 4052$. Звідси маємо

$$\begin{cases} k & = 4, \\ 2n+k-1 & = 1013, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} k & = 1, \\ 2n+k-1 & = 4052, \end{cases}$$

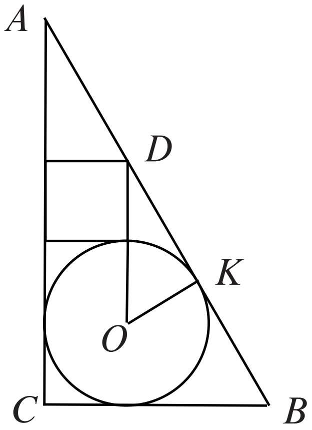
тобто $k = 4$, $n = 505$ чи $k = 1$, $n = 2026$. Звідси отримуємо можливі подання $505 + 506 + 507 + 508$ чи 2026.

9.2. Автомобільний номер назвемо щасливим, якщо у назві всіх його цифр немає жодної літери, яка повторюється більше одного разу. Знайдіть щасливий автомобільний номер, якому відповідає найбільше число.

Відповідь: 7320.

Розв'язання. Розв'язання: Запишемо назви всіх цифр: нуль, один, два, три, чотири, п'ять, шість, сім, вісім, дев'ять. Вкажемо пари цифр, назви яких в сукупності мають попарно різні літери: $(0,2)$, $(0,3)$, $(0,7)$, $(1,5)$, $(1,6)$, $(1,7)$, $(2,3)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(3,7)$, $(5,7)$, $(7,9)$. Бачимо, що лише дві цифри можуть бути в одному щасливому номері більше, ніж з трьома іншими — це 2 і 7. Тому щасливий номер не може мати більше, ніж чотири цифри. Кандидатами на цифри чотирицифрового щасливого номера можуть бути лише цифри 0,1,2,3,5,7. У такому номері разом з цифрою 1 мали б бути і цифри 6 та 7, що заперечується умовою. А разом з цифрою 5 мали б бути і цифри 1 та 2, що заперечується умовою. Залишається перевірити набір цифр 0,2,3,7. Дійсно, назви цих цифр в сукупності мають попарно різні цифри. З них утворюємо найбільше число 7320.

9.3. Знайдіть площу прямокутного трикутника, у який вписано квадрат зі стороною 1 см і коло радіуса 1 см так, як показано на малюнку.



Відповідь: $3 + 2\sqrt{3}$ см^2.

Розв'язання. Радіус $|OK|$, проведений в точку дотику, рівний 1 см, а гіпотенуза $|OD|$ прямокутного $\triangle OKD$ рівна 2 см. Кути $\angle BAC$ і $\angle KDO$ рівні, тому прямокутні трикутники $\triangle OKD$ і $\triangle CBA$ подібні. Отже,

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|OD|}{|OK|} = 2,$$

і, якщо $|BC| = x$, то $|AB| = 2x$. З теореми Піфагора $|AB|^2 + x^2 = (2x)^2$, звідки $|AB| = x\sqrt{3}$. З відомої формули для радіуса вписаного кола $r = \dfrac{2S_{ABC}}{|AB| + |BC| + |AC|}$ отримуємо

$$\frac{x \cdot x\sqrt{3}}{x + x\sqrt{3} + 2x} = \frac{x\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 1,$$

отже, $x = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$. Тоді шукана площа дорівнює

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} = 3 + 2\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

9.4. Розв'яжіть рівняння

$$(x^2+3x-7)^2+3(x^2+3x-7)-7=x.$$

Відповідь: $-1\pm 2\sqrt{2}$, $-2\pm\sqrt{7}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $t=x^2+3x-7$ і зведемо рівняння до системи

$$\begin{cases} t=x^2+3x-7, \\ x=t^2+3t-7. \end{cases}$$

Віднімемо від першого рівняння друге, тоді послідовно отримаємо

$$x-t=(t^2+3t-7)-(x^2+3x-7),$$

$$x-t=t^2-x^2+3t-3x,$$

$$x-t=(t-x)(t+x)+3(t-x),$$

$$(x-t)(t+x)+3(x-t)+(x-t)=0,$$

$$(x-t)(t+x+4)=0.$$

Далі, якщо $x-t=0$, то $x=x^2+3x-7$, $x^2+2x-7=0$ і $x_{1,2}=-1\pm 2\sqrt{2}$.

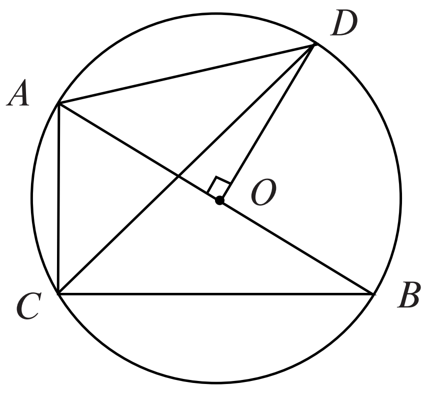
Якщо ж $t+x+4=0$, то $x^2+3x-7+x+4=0$, $x^2+4x-3=0$ і $x_{3,4}=-2\pm\sqrt{7}$.

10.1. Скільки існує натуральних чисел, в яких цифри розташовано у спадному порядку?

Відповідь: 1023, якщо нуль вважається натуральним, і 1022, якщо ні (зараховуються обидві відповіді, якщо трактування саме таке).

Розв'язання. Всі натуральні числа зі спадним порядком цифр можна отримати, викреслюючи деякі з цифр 9876543210. Кожну з цифр можна викреслити або залишити, тому всіх варіантів існує $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{10} = 2^{10} =$ 1024. З них ми повинні виключити варіант, коли викреслено всі цифри, і, можливо, число 0, яке у деяких країнах не вважається натуральним, отже, залишається 1022 або 1023 числа.

10.2. Прямий кут вписано в коло, яке відтинає на сторонах кута хорди довжини 1 см і 2 см. Яка довжина хорди, яку відтинає це коло на бісектрисі цього кута?



Відповідь: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ см.

Розв'язання. Вписаний прямий кут $\angle ACB$ спирається на діаметр AB, який можемо знайти за теоремою Піфагора: $|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Отже, радіус описаного навколо трикутника кола рівний $R = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Оскільки вписаний кут $\angle ACD$ дорівнює 45°, то центральний кут $\angle AOD$ дорівнює $90°$, звідки $|AD|$ можна знайти як гіпотенузу рівнобедреного прямокутного трикутника: $|AD| = R\sqrt{2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Запишемо теорему косинусів для трикутника $\triangle ACD$, позначивши $x = |CD|$:

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 = 1^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 \cdot \cos 45°,$$

тобто

$$\frac{5}{2} = 1 + x^2 - x\sqrt{2}, \text{ чи } x^2 - x\sqrt{2} - \frac{3}{2} = 0.$$

Додатній корінь цього рівняння $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ і є шуканою довжиною хорди.

10.3. Таблицю 2027×2027 заповнили цілими числами так, що сума чисел в клітинках кожного квадрата 2×2 додатна. Чи обов'язково сума всіх чисел таблиці також додатна?

Відповідь: Ні, не обов'язково.

Розв'язання. Розглянемо такий приклад заповнення таблиці. Пронумеруємо рядки і стовпці таблиці. У клітинках, для яких номери рядка і стовпця мають різну парність поставимо 0, у клітинки з парними номерами рядка і стовпця поставимо 601, а клітинки з непарними номерами рядка і стовпця поставимо -600. Бачимо, що кожний квадрат 2×2 містить два нулі і числа 601 та -600. Тому в такому квадраті сума чисел рівна 1, і тому додатна. Порахуємо суму всіх чисел в таблиці: маємо 1013^2 чисел 601 і 1014^2 чисел -600. Отже, сума всіх чисел рівна

$$S = 601 \cdot 1013^2 - 600 \cdot 1014^2 = 1013^2 + 600 \cdot (1013^2 - 1014^2)$$
$$= 1013^2 - 600 \cdot 2027 < 1013^2 - 2 \cdot 600 \cdot 1013 = 1013 \cdot (1013 - 1200) < 0.$$

На рисунку нижче показаний фрагмент у верхньому лівому куті таблиці.

10.4. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{9x^2}{(2x+1)^2} + \frac{9x^2}{(3x+1)^2} = 40.$$

-600	0	-600	0	-600	0	-600
0	601	0	601	0	601	0
-600	0	-600	0	-600	0	-600
0	601	0	601	0	601	0
-600	0	-600	0	-600	0	-600
0	601	0	601	0	601	0
-600	0	-600	0	-600	0	-600

Відповідь: $\dfrac{-2}{3}, \dfrac{-2}{7}$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне такому рівнянню:

$$\frac{9}{(2+1/x)^2} + \frac{9}{(3+1/x)^2} = 40.$$

Зробимо заміну $t = 5/2 + 1/x$, тоді послідовно отримаємо

$$\frac{9}{(t-1/2)^2} + \frac{9}{(t+1/2)^2} = 40,$$

$$\frac{9(2t^2+\frac{1}{2})}{\left(t^2-\frac{1}{4}\right)^2} = 40,$$

$$9(2t^2+\frac{1}{2}) = 40\left(t^2-\frac{1}{4}\right)^2,$$

$$40t^4 - 38t^2 - 2 = 0,$$

$$20t^4 - 19t^2 - 1 = 0,$$

звідки $t^2 = 1$ або $t^2 = -\frac{1}{20}$, тобто $t = \pm 1$. Повертаємося до змінної x: $\frac{1}{x} = t - \frac{5}{2}$, тоді

$$t = 1 \implies \frac{1}{x} = 1 - \frac{5}{2} \implies x = \frac{-2}{3},$$

$$t = -1 \implies \frac{1}{x} = -1 - \frac{5}{2} \implies x = \frac{-2}{7}.$$

11.1. Петро інтенсивно готується до НМТ і вже вивчив все, крім обчислення периметра прямокутника і площі прямокутника, які він плутає. Скільки існує "щасливих" цілочисельних розмірів прямокутників, для яких байдуже, який зі способів застосовувати?

Відповідь: 3, якщо розміри 3×6 і 6×3 вважаємо різними, і 2, якщо однаковими.

Розв'язання. Якщо довжини сторін прямокутника є натуральними числами a та b, то повинна виконуватись рівність $ab = 2a + 2b$, тобто $ab - 2a - 2b + 4 = 4$, чи $(a-2)(b-2) = 4$. Жодне з a і b не може бути рівним 2, і, якби, скажімо, a було одиницею, то b було б рівним -2, що не має геометричного сенсу. Отже, a і b не менші за 3, і 4 розкладено на натуральні множники $a-2$ та $b-2$. Можливі випадки:

$$\begin{cases} a-2 &= 2, \\ b-2 &= 2, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a-2 &= 1, \\ b-2 &= 4, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a-2 &= 4, \\ b-2 &= 1, \end{cases}$$

звідки отримуємо прямокутники 4×4, 3×6, 6×3.

11.2. Знайдіть найбільше число, у якого кожна цифра, починаючи з третьої, дорівнює сумі двох попередніх цифр.

Відповідь: 10112358.

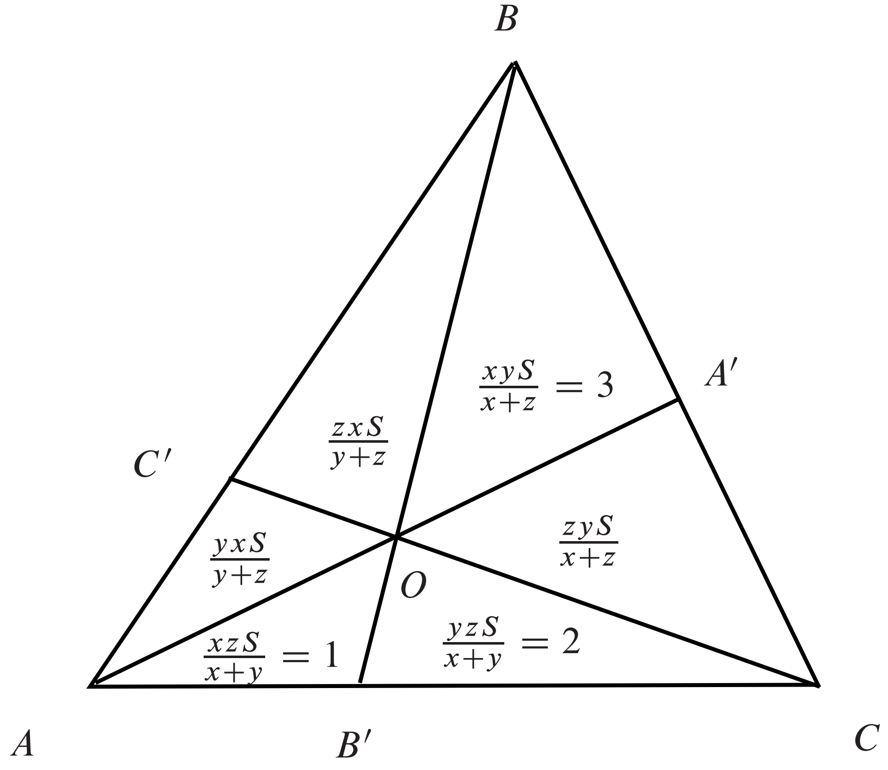
Розв'язання. Найменші можливі перші дві цифри числа це 1 і 0, для таких цифр послідовно отримуємо решту цифр:

$$1+0=1, \quad 0+1=1, \quad 1+1=2, \quad 1+2=3, \quad 2+3=5, \quad 3+5=8.$$

Для інших пар перших цифр ми отримуємо не більше ніж шість цифр в числі. Отже знайдене число — найбільше.

11.3. На малюнку вказано площі деяких частин, на які ділять трикутник три відрізки, що перетинаються в одній точці. Знайдіть площі решти частин.

Відповідь: 1, 2 і 3.



Розв'язання. Позначимо

$$x = \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}, \quad y = \frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}, \quad z = \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}},$$

тобто відрізки AO, BO і CO ділять загальну площу трикутника S на частини xS, yS, zS. Очевидно, що $x + y + z = 1$.

Зауважимо, що

$$\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOB'}}{S_{B'OC}} = \frac{|AB'|}{|B'C|},$$

тому відрізок OB' ділить площу zS трикутника $\triangle AOC$ у відношенні $\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{xS}{yS} = \frac{x}{y}$. Звідси можна знайти площі частин $S_{AOB'} = zS \cdot \frac{x}{x+y} = \frac{xzS}{x+y}$, $S_{B'OC} = zS \cdot \frac{y}{x+y} = \frac{yzS}{x+y}$. Аналогічно знаходимо площі інших чотирьох частин.

Пригадаємо, що за умовою $\dfrac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \dfrac{1}{2}$, тому $y = 2x$. Крім того,

$$\frac{S_{A'OB}}{S_{AOB'}} = \frac{xyS}{x+z} : \frac{xzS}{x+y} = \frac{y(x+y)}{z(x+z)} = 3,$$

тобто $\dfrac{6x^2}{z(x+z)} = 3$, чи $\dfrac{z(x+z)}{x^2} = 2$. Останнє рівняння можна записати як $\left(\dfrac{z}{x}\right)^2 + \dfrac{z}{x} = 2$. Величина $t = \dfrac{z}{x}$ повинна бути невід'ємною і задовольняти рівняння $t^2 + t = 2$, звідки $t = 1$, $z = x$. Враховуючи $y = 2x$ і $x + y + z = 1$, маємо $x = z = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{2}$. Звідси негайно отримуємо $S_{AOC'} = S_{AOB'} = 1$, $S_{BOC'} = S_{COB'} = 2$ і $S_{COA'} = S_{BOA'} = 3$.

11.4. Для скількох пар цілих чисел x, y справджується нерівність

$$\sqrt{x^4 - 8x^2y + 16y^2} + \sqrt{y^4 - 8y^2x + 16x^2} \le 4(x+y) - (x^2 + y^2)\ ?$$

Відповідь: 7.

Розв'язання. Врахуємо, що

$$x^4 - 8x^2y + 16y^2 = (x^2 - 4y)^2, \quad y^4 - 8y^2x + 16x^2 = (y^2 - 4x)^2,$$

тому

$$\sqrt{x^4 - 8x^2y + 16y^2} = |x^2 - 4y|, \quad \sqrt{y^4 - 8y^2x + 16x^2} = |y^2 - 4x|.$$

Тоді нерівність матиме вигляд

$$|x^2 - 4y| + (x^2 - 4y) + |y^2 - 4x| + (y^2 - 4x) \le 0.$$

Враховуючи, що $A + |A| \ge 0$, і рівність $A + |A| = 0$ істинна, якщо і тільки якщо $A \le 0$, маємо

$$|x^2 - 4y| + (x^2 - 4y) + |y^2 - 4x| + (y^2 - 4x) \ge 0,$$

тому початкова нерівність рівносильна до

$$|x^2 - 4y| + (x^2 - 4y) + |y^2 - 4x| + (y^2 - 4x) = 0,$$

тобто до системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 - 4y \le 0, \\ y^2 - 4x \le 0. \end{cases}$$

Далі, $x^4 \le 16y^2 \le 64x$, тому $x \ge 0$, $x^4 - 64x \le 0$, і

$$0 \le x \le 4, \quad \frac{x^2}{4} \le y \le 2\sqrt{x}.$$

Перебираємо всі можливі цілі значення $x = 0, 1, 2, 3, 4$ і знаходимо всі цілочисельні розв'язки $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$.