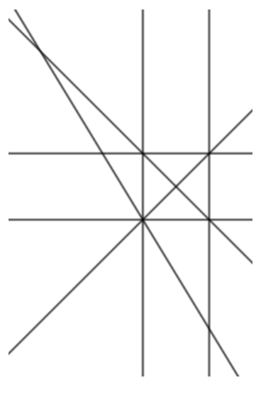
5 клас

1. Розв’яжіть числовий ребус

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ + & & a & b \\ \hline & 5 & 4 & 3 \end{array}$$

   у якому a, b і c позначають не обов’язково різні цифри.
   Відповідь: $\boldsymbol{a = 4, b = 9, c = 4}$
   Розв’язання. Під час додавання перша цифра a верхнього числа або не зміниться, або зросте на одиницю (якщо у попередньому розряді виникне перенос). Оскільки вона повинна стати п’ятіркою, можливі випадки $a = 5$ та $a = 4$. Якщо $a = 5$, то верхнє число не менше за 500, а нижнє — за 50, тому сума не менша за 550, а ми повинні отримати 543. Отже, $a = 4$, і відбувся перенос у попередньому розряді, звідки $a = 4$ плюс b плюс, можливо, одиниця з попереднього розряду дають 14. Це можливо тільки якщо $b = 9$, а у наймолодшому розряді $b + c$ становить 13. Бачимо, що можливо тільки $a = 4, b = 9, c = 4$, і перевірка підтверджує, що це розв’язок ребуса.

2. Намалюйте сім прямих так, щоб ці прямі розділили площину на області, серед яких обмеженими є лише трикутники, і всього трикутників рівно сім.
   Розв’язання. Наприклад так, як показано на малюнку.



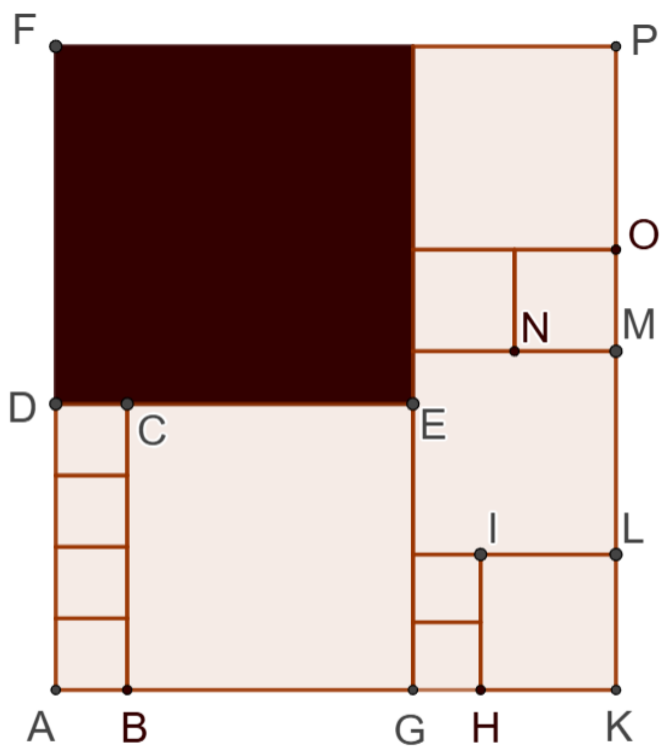
3. Батько має одного сина і молодший від дідуся на 30 років. Якщо додати їх вік, отримаємо 95 років, а десять років тому сума для чоловіків у сім’ї становила 70 років. Скільки років кожному з них?
   Відповідь: Сину 5 років, батькові 30 років, дідусеві 60 років.
   Розв’язання. Десять років тому сума років батька і дідуся була менша на 20 років, а загалом сумарний вік чоловіків у сім’ї був менший на 25 років. Отже, зменшення ще на 5 років — завдяки синові, якому зараз 5 років, а тоді його ще не було. Звідси разом батькові і дідусеві зараз $95 - 5 = 90$

років, і, враховуючи, що дідусь на 30 років старший, йому 60 років, а батькові - 30 років.

4. Петрик на дошці записав деяке трицифрове число, далі Миколка стер останню цифру записаного числа, і отримане двоцифрове число помножив на 3. Далі Оксанка додала до отриманого числа 92 і отримала початкове число. Знайдіть число, яке записав Петрик.
Відповідь: 128 або 131
Розв'язання. Якщо Миколка стер цифру c і отримав двоцифрове число a, то Петриком було записано число $10a + c$, а Оксанка отримала число $3a + 92$. Тому маємо рівняння $10a + c = 3a + 92$, звідки $7a + c = 92, 92 - \text{c} = 7a$. Це можливо тільки якщо цифра $\text{c} = 1$ або $c = 8$. Далі знаходимо відповідно $a = 13$ і $a = 12$.

6 клас

1. Щур разом з мишею з'їдають кружало сиру за 4 дні, а з двома мишами — за 3 дні. За скільки днів щур подолає сир без допомоги мишей?
Відповідь: За 6 днів.
Розв'язання. За умовою за день щур з однією мишею з'їдають $\frac{1}{4}$ кружала, а з двома - $\frac{1}{3}$ кружала. Отже, друга миша за день з'їдає
$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ кружала. Тому сам щур за день з'їсть $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$, і на весь сир йому потрібно 6 днів.
2. Прямокутник розрізали на 13 квадратів. Знайдіть сторону найбільшого з цих квадратів, якщо сторона одного з найменших квадратів дорівнює 36.



Відповідь: 190

Розв'язання. Нехай $AB = x, GH = 2y$. Тоді, використовуючи рівність сторін квадрата, послідовно отримуємо: $BC = 4AB = 4x, DE = DC + CE = x + 4x = 5x, AF = AD + DF = 4x + 5x = 9x.$

$$HI = 2GH = 4y, KL = HI = 4y, GK = GH + HK = 2y + 4y = 6y, LM = GK = 6y, OP = GK = 6y, MN = \frac{GK}{2} = 3y, OM = NM = 3y, PK = KL + LM + OM + OP = 4y + 6y + 3y + 6y = 19y$$

Оскільки $AFPK$- прямокутник, то $AF = PK$. Отримали рівняння $9x = 19y$. $x = 19y/9 > 2y$. Отже найменші квадрати це квадрати з стороною $2y$. З умови випливає $2y = 36$. Тому $y = 18$, і $x = 38, 5x = 190$. Отже, сторона найбільшого квадрата дорівнює 190

3. На п'ятьох картках записано по одній цифрі, і переставляючи їх у різному порядку з них можна скласти рівно 48 різних п'ятицифрових чисел. На чотирьох з них записано цифри 5,5,1 і 2. Яка цифра могла бути записана на п'ятій картці?

   Відповідь: 0

   Розв'язання. Нехай на п'ятій картці записана цифра 5. Маємо набір цифр 1,2,5,5,5. У п'ятицифровому числі для цифри 1 є 5 можливій позицій, для цифри 2 залишається 4 позиції. На незанятих позиціях ставимо 5-ки. Отже, можемо скласти $5 \cdot 4 = 20$ різних п'ятицифрових чисел.

   Нехай на п'ятій картці записана цифра 1. Маємо набір цифр 1,1,2,5,5. У п'ятицифровому числі для цифри 2 є 5 можливій позицій. Цифра, яка стоїть на першій зліва незанятій позиції може бути однією з двох: 1 або 5 – 2 варіанти. Далі, для другого екземпляра цієї цифри залишається 3 позиції. Отже, можемо скласти $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$ різних п'ятицифрових чисел.

   Аналогічно, якщо на п'ятій картці записана цифра 2, також можемо скласти 30 різних п'ятицифрових чисел.

   Нехай на п'ятій картці записана цифра $a \neq 0,1,2,5$. Маємо набір $a,$ 1,2,5,5 Для цифри a є 5 можливих позицій, для цифри 1 залишається 4 незаняті позиції, для цифри 2 залишається 3 незаняті позиції. Отже, можемо скласти $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ різних п'ятицифрових чисел.

   Нехай на п'ятій картці записана цифра 0. Маємо набір 0,1,2,5,5

   Для цифри 0 є 4 можливих позицій, бо вона не може стояти на першій зліва позиції, для цифри 1 залишається 4 незаняті позиції, для цифри 2 залишається 3 незаняті позиції. Отже, можемо скласти $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ різних п'ятицифрових чисел.

   Отже, тільки для цифри 0 виходить рівно 48 різних п'ятицифрових чисел.

4. Розв'яжіть рівняння у натуральних числах, якщо p – просте

$$m^2 + p^2 = 2^n$$

   Відповідь: $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{n}) = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$.

Розв'язання. Зрозуміло, що $p^2 \geq 2^2 = 4$, тому $n \geq 3$, і 2^n кратне 4.
Якщо p – непарне, то і m – непарне, тоді m^2 і p^2 дають остачу 1 при діленні на 4, отже, 2^n не кратне 4. Протиріччя.
Отже, p – парне, і оскільки p – просте, то $p = 2$. Тому $m^2 = 2^n - p^2 = 2^n - 2^2 = 2^2(2^{n-2} - 1)$, $m^2/2^2 = 2^{n-2} - 1$ – непарне натуральне число, яке є точним квадратом, тому дає остачу 1 при діленні на 4. Це можливо тільки при $n = 3$. Далі, $m^2 = 2^n - 2^2 = 4$, $m = 2$.

7 клас

1. Майстрові дали плити $1\text{ м} \times 1\text{ м}$ і доручили викласти ними прямокутну ділянку. Виявилось, що у останньому ряду бракує однієї плити. Майстер зняв цей ряд і розклав плити з нього по одній у інших рядах. Одна плита виявилась зайвою. Скільки їх було, якщо їх кількість — між 40 і 50?
Відповідь: 41
Розв'язання. Нехай майстрові не вистачило однієї плити до прямокутника з m рядів по n плит, тоді плит є $mn - 1$. Після перекладання маємо $m - 1$ рядів по $n + 1$ плит, і одну зайву, тобто $(m-1)(n+1)+1$ плит. З рівності $mn - 1 = (m-1)(n+1)+1$ отримуємо $mn - 1 = (mn - n + m - 1) + 1$. І після перенесення всіх змінних вліво, а сталих чисел вправо отримуємо $n - m = 1$, тобто $n = m + 1$. Отже, кількість плит рівна $mn - 1 = m(m+1) - 1$. Цей вираз зростає, коли m стає більшим, тому підбором можна з'ясувати, що єдиним натуральним m, для якого $40 \leq m(m+1) - 1 \leq 50$, є $m = 6$. Отже, була $6 \cdot 7 - 1 = 41$ плита.

2. Двоє друзів ходять зі швидкістю 5 км/год і їздять на самокаті зі швидкістю 10 км/год. Їм потрібно дістатися у літній табір дорогою довжини 50 км. Вони вирушили одночасно — перший пішки, а другий на самокаті. Коли другий дістався дорогою до містка, він заховав під ним самокат і пішов далі пішки, а перший, дійшовши до містка, вийняв самокат і поїхав ним. У підсумку перший приїхав на годину пізніше за другого. На якій відстані розташований місток від початку дороги?
Відповідь: 30 км.
Розв'язання. Нехай відстань до містка рівна x км, тоді після містка $(50 - x)$ км. Перший хлопець витратив на дорогу $\frac{x}{5} + \frac{50-x}{10}$ годин, а другий $\frac{x}{10} + \frac{50-x}{5}$ годин. За умовою час першого на годину більший, тому
$$\left(\frac{x}{5} + \frac{50-x}{10}\right) - \left(\frac{x}{10} + \frac{50-x}{5}\right) = 1.$$
Для спрощення помножимо рівність на 10 і отримаємо
$$(2x + 50 - x) - (x + 100 - 2x) = 10;$$
тобто $2x - 50 = 10$, звідки $x = 30$ км —шукана відстань від початку дороги до містка.

3. Петрик записав трицифрове число, далі Миколка і Гриць записали трицифрові числа з тих самих цифр, що і Петрик. Виявилося, що для кожної пари записаних хлопцями чисел їх різниця є трицифровим числом, у запису якого використана одна цифра. Яке число міг записати Петрик, якщо його число найменше серед записаних? Вкажіть всі можливі варіанти.

   Відповідь: 148,185,259,296
   Розв'язання. При перестановці цифр місцями сума цифр числа не міняється, не міняється також і остача при діленні цього числа на 9. Тому всі записані хлопцями числа мають однакову остачу при діленні на 9, і для кожної пари записаних хлопцями чисел їх різниця є трицифровим числом, яке кратне 9, і до того ж записане за допомогою однієї цифри. Такі числа 333 і 666. Тому числа, записані хлопцями, це $a, a+333$ і $a+666$. При цьому
   їх перші цифри і утворюють записані ними числа. А оскільки $a \geq 100, a+666 \leq 999$, то $a \leq 333$, $433 \leq a+333 \leq 666, a+666 \geq 766$, то такими наборами цифр можуть бути тільки такі: (1,4,7),(1,4,8),(1,5,8), (2,5,8),(2,5,9),(2,6,9),(3,6,9). Простим перебором переконуємося, що задовольняють умові тільки числа 148,185,259,296.

4. Розв'яжіть рівняння у натуральних числах, якщо p – просте

$$m^4 + p^8 = 2^n$$

   Відповідь: $\boldsymbol{(m, p, n) = (4, 2, 9)}$.
   Розв'язання. Зрозуміло, що $p^8 \geq 2^8 = 256$, тому $n \geq 9$, і 2^n кратне 4. Якщо p – непарне, то і m – непарне, тоді m^4 і p^8 дають остачу 1 при діленні на 4, тоді 2^n не кратне 4. Протиріччя.
   Отже, p – парне, і оскільки p – просте, то $p = 2$. Тому $m^4 = 2^n - p^8 = 2^n - 2^8 = 2^8(2^{n-8} - 1)$, $m^4/2^8 = 2^{n-8} - 1$ – непарне натуральне число, яке є точним квадратом, тому дає остачу 1 при діленні на 4. Це можливо тільки при $n = 9$. Далі, $m^4 = 2^n - 2^8 = 256, m = 4$.